



Uma Análise de Identificabilidade Aplicada no Modelo Transitório do Gerador Síncrono

Taylor Gomes Landgraf¹

Elmer Pablo Tito Cari²

Luís Fernando Costa Alberto³

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação

Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP

Resumo. O sucesso da estimação de parâmetros de modelos não lineares depende da escolha adequada de entradas e saídas disponíveis. Entretanto, para alguns conjuntos de entradas e saídas do modelo não é possível a estimação dos parâmetros desconhecidos. Neste trabalho, propõe-se a aplicação de um teste de identificabilidade antes da aplicação de métodos de estimação a fim de detectar essas situações. O teste de identificabilidade é aplicado em duas situações no modelo transitório do gerador síncrono para um conjunto de entradas e saídas onde é e não é possível obter todos os parâmetros do modelo. O teste detectou a identificabilidade dos parâmetros do gerador síncrono e assim o mesmo pode ser utilizado como uma análise preliminar em processos de estimação de parâmetros.

Palavras-chave. Identificabilidade, estimação de parâmetros, modelo transitório do gerador síncrono.

1 Introdução

A estimação de parâmetros e validação de modelos é muito importante para análise de comportamentos de sistemas de energia elétrica. Baseados em um conjunto de medidas obtidas do sistema real, conjunto de equações do modelo matemático e um método de estimação, os parâmetros podem ser determinados [1]. No caso específico do gerador síncrono o sucesso da estimação dos parâmetros depende da informação contidas nas medidas e da escolha de entradas e saídas do modelo. Entretanto, em algumas situações problemas de identificabilidade podem ocorrer resultando em divergências (casos de métodos não-lineares) ou estimação a valores diferentes dos valores verdadeiros (casos de métodos heurísticos) devido a conjunto de medidas com pouca informação ou escolha inadequada de entradas e saídas do modelo.

¹taylor@usp.br

²elmerpab@sc.usp.br

³lfcalberto@usp.br

Em geral, o problema de identificabilidade pode ser classificado em duas categorias: (i) identificabilidade estrutural (ou *a priori*) e (ii) identificabilidade prática (ou *a posteriori*), também conhecida como numérica. A identificabilidade estrutural determina se dado um modelo é teoricamente possível determinar o valor real de um parâmetro ou um conjunto de parâmetros através apenas das medidas de saídas e entradas deste modelo [2, 3]. A identificabilidade prática (métodos *a posteriori*) revelam propriedades práticas de identificação com base nos resultados dos parâmetros a partir de ajuste de curvas dos conjuntos de dados disponíveis. A identificabilidade prática pode ser avaliada com base nas funções de sensibilidade de saída (derivadas parciais das saídas em relação aos parâmetros).

Na literatura, muitos métodos têm sido propostos para analisar a identificabilidade estrutural de modelos biológicos [4–6]. Muitos desses trabalhos são baseados no trabalho de Hermann e Krener [7] que estendeu o conceito de observabilidade de sistemas dinâmicos lineares a sistemas dinâmicos não lineares, desenvolvendo a condição de rank de observabilidade baseada na álgebra de Lie [5]. A partir do conceito de observabilidade apresentando em [7] vários métodos foram propostos para analisar a identificabilidade de parâmetros de modelos de equações diferenciais ordinárias (ODE). No entanto, um modelo não linear de equações algébricas diferenciais (EAD) é uma estrutura de modelo geral, que em muitos casos podem ser difíceis de analisar. Além disso, as abordagens utilizadas para análise de modelos de EDOs não são diretamente aplicáveis em EADs. Uma abordagem para avaliar a observabilidade de modelos não lineares usando EADs foi desenvolvida em [8].

Neste trabalho propõe-se a aplicação do conceito de identificabilidade estrutural ao modelo dinâmico transitório do gerador síncrono como um passo prévio antes da aplicação de qualquer método de estimativa de parâmetros. Os modelos dos geradores são descritos por EDOs ou por EADs. Mostra-se que os testes de rank da matriz Jacobiana apresentada em [8] podem ser usados para examinar a identificabilidade local e a observabilidade de equações algébricas-diferenciais aplicadas aos modelos dinâmicos não-linear do gerador síncrono.

2 Formulação do Problema

Considere o modelo dinâmico algébrico diferencial dado por:

$$\dot{x} = f(x, p, u), \quad (1)$$

$$0 = g(x, p, u), \quad (2)$$

$$y = h(x, p, u). \quad (3)$$

onde $f(\cdot)$ é um conjunto de equações diferenciais não linear, $g(\cdot)$ é o conjunto de equações algébricas não linear, $h(\cdot)$ é o conjunto de equações relacionado às medidas disponíveis, $x \in R^n$ é o vetor de variáveis de estado e variáveis algébricas, $y \in R^m$ é o vetor de variáveis de saída, $u \in R^p$ é o vetor de variáveis de entrada e $p \in R^l$ é o vetor de parâmetros.

Seja p_i a i -ésima componente de ' p '. Admite-se que as funções f , g e h são diferenciáveis em relação a cada p_i , $i = 1, \dots, l$. Com base nas medidas disponíveis de entrada e saída, é desejável analisar a observabilidade do sistema.

2.1 Observabilidade

O modelo do sistema (1)-(3) pode ser condensado da seguinte forma, onde o conjunto de funções $F(\cdot)$ incorpora as equações diferenciais não lineares $f(\cdot)$ e as equações algébricas não lineares $g(\cdot)$ de (1)-(2):

$$F(\dot{x}, x, p, u) = Bu \quad (4)$$

$$y = h(x, p, u) \quad (5)$$

A formulação de observabilidade, a partir de (4)-(5), é baseada na Jacobiana [8]:

$$J = \begin{bmatrix} G_x & G_{\dot{x}} & G_w \\ H_x & H_{\dot{x}} & H_w \end{bmatrix} \quad (6)$$

Sendo:

$$G = \begin{bmatrix} F(\dot{x}, x, p, u) \\ F_x(\dot{x}, x, p, u)\dot{x} + F_{\dot{x}}(\dot{x}, x, p, u)\ddot{x} \\ \vdots \\ \frac{d^k}{dt^k}[F(\dot{x}, x, p, u)] \end{bmatrix} \text{ e } H = \begin{bmatrix} h(x, p, u) \\ h_x(x, p, u)\dot{x} \\ \vdots \\ \frac{d^j}{dt^j}[h(x, p, u)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(j)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

e k e j são os índices de diferenciação do sistema de equações (F) e de medidas (y) respectivamente e $w = [x^{(2)}, \dots, x^{(k)}]$ são os termos de alta ordem das derivadas de x .

Diz-se que o sistema é suavemente observável se:

$$(A1) \ rank(J) = n + rank(J_{red}), \quad (8)$$

$$\text{onde: } J_{red} = \begin{bmatrix} G_{\dot{x}} & G_w \\ H_{\dot{x}} & H_w \end{bmatrix}$$

$$(A2) \ rank(J) \text{ é constante em } U \quad (9)$$

onde U é a vizinhança em torno de um determinado ponto de operação de interesse e n o número de variáveis de x .

2.2 Identificabilidade

A ideia, quando se examina a identificabilidade e observabilidade do sistema (4)-(5), é que se o sistema é observável e identificável, então deve haver informação suficiente nas equações para calcular $x(t)$ e p quando $u(t)$ e $y(t)$ são sinais conhecidos. Isso significa que (4) e (5) ambas devem ser usadas como equações que fornecem informações sobre $x(t)$ e p . No entanto, se (4) e (5) forem usadas como um sistema de equações algébricas diferenciais para calcular $x(t)$ e p , a informação de que os parâmetros p são constantes também deve ser incluída [9]. Isso pode ser escrito pela equação

$$\dot{p} = 0 \Rightarrow r(p) = 0 \quad (10)$$

A abordagem é examinar se as equações (4), (5) e (10) juntas fornecem informações suficientes para calcular $x(t)$ e p localmente. Deste modo incorporando as equações $r(.)$ de (10) ao conjunto de funções da equação (4), $F(.)$ pode ser decomposta como:

$$F(\dot{x}, x, p, u) = [f(.) \ g(.) \ r(.)]^T = \mathbf{0} \quad (11)$$

Para essa análise, as equações das medidas $h(.)$ são mantidas pela equação (5). A formulação da observabilidade para este sistema é dada a partir da avaliação da Jacobiana J na equação (6) e usando os índices de diferenciações k e j , calculamos os $G_x, G_{\dot{x}}, G_w, H_x, H_{\dot{x}}, H_w$, onde os subscritos indicam as variáveis de diferenciação. O rank da Jacobiana é investigada de acordo com as condições (A1) e (A2) das equações (8)-(9).

3 Modelo Transitório do Gerador Síncrono

O sistema analisado consiste em um gerador síncrono de tensão terminal (V_t) conectado a um barramento infinito (tensão E_b) através de uma linha de impedância equivalente (Z_I) conforme representado na Figura 1.

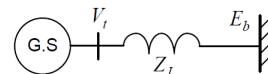


Figura 1: Sistema gerador síncrono conectado a um barramento infinito.

As equações diferenciais que descrevem o modelo transitório do gerador síncrono são:

$$\delta = \omega \quad (12)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_o}{2H} \left[P_m - E'_q I_q - E'_d I_d - (x'_d - x'_q) I_d I_q - \frac{D}{\omega_o} \omega \right] \quad (13)$$

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{T'_{do}} [E_{fd} - E'_q + (x_d - x'_d) I_d] \quad (14)$$

$$\dot{E}'_d = \frac{-1}{T'_{qo}} [E'_d + (x_q - x'_q) I_d] \quad (15)$$

$$I_d = \frac{E_b \cos(\delta) - E'_q}{x'_d + Z_I} \quad (16)$$

$$I_q = \frac{E_b \operatorname{sen}(\delta) + E'_d}{x'_q + Z_I} \quad (17)$$

sendo $p = [x_d, x'_d, T'_{do}, x_q, x'_q, T'_{qo}]^T$ o vetor de parâmetros desconhecidos. Os demais parâmetros (D, H, Z_I, E_b, ω_o) são admitidos como conhecidos. Mais detalhes do modelo pode ser encontrado em [1].

4 Resultados e Discussões

Deseja-se avaliar a identificabilidade do sistema (12)-(17) fazendo as seguintes escolhas: $u = [I_d, I_q, E_{fd}, P_m]^T$ as entradas, $y = \omega$ a saída, e $p = (x_d, x'_d, T'_{do}, x_q, x'_q, T'_{qo})^T$ os

parâmetros desconhecidos (vide Figura 2). Assume-se que δ , I_d e I_q podem ser medidas por intermédio de PMU's, não sendo necessária as equações (12), (16) e (17).

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad I_d \quad} \\ \xrightarrow{\quad I_q \quad} \\ \xrightarrow{\quad E_{fd} \quad} \\ \xrightarrow{\quad P_m \quad} \end{array} \boxed{\begin{array}{l} \dot{\omega} = \frac{\omega_o}{2H} \left[P_m - E'_q I_q - E'_d I_d - (x_d - x'_q) I_d I_q - \frac{D}{\omega_o} \omega \right] \\ \dot{E}'_q = \frac{1}{T'_{do}} \left[E_{fd} - E'_q + (x_d - x'_d) I_d \right] \\ \dot{E}'_d = \frac{-1}{T'_{qo}} \left[E'_d + (x_q - x'_q) I_d \right] \end{array}} \xrightarrow{\quad \omega \quad}$$

Figura 2: Seleção de entradas e saídas para fins de estimação de parâmetros do gerador síncrono apresentado em [1].

Em [1] é relatado que para a escolha de entradas e saídas da Figura 2, os parâmetros p desse modelo não podem ser estimados pelo método de sensibilidade de trajétoria (identificabilidade prática).

Aplicando o procedimento para identificabilidade da Seção 2 no sistema (13)-(15) obtem-se a função $f(\cdot)$ do modelo:

$$f(\cdot) = \begin{cases} 2H\dot{\omega} + \omega_o E'_q I_q + \omega_o E'_d I_d + \omega_o (x'_d - x'_q) I_d I_q + D\omega - \omega_o P_m \\ T'_{do} \dot{E}'_q + E'_q - (x_d - x'_d) I_d - E_{fd} \\ T'_{qo} \dot{E}'_d + E'_d + (x_q - x'_q) I_d \end{cases} \quad (18)$$

Seja $x = (x_1, x_2, x_3)^T = (\omega, E'_q, E'_d)^T$ e $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)^T = (x_d, x'_d, T'_{do}, x_q, x'_q, T'_{qo})^T$. E as entradas e saídas são $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T = (E_{fd}, I_q, I_d, P_m)$ e $y = x_1 = \omega$. Seja ainda o vetor de estados aumentado dado por:

$$x_a = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad (19)$$

Desta maneira o vetor de estados aumentado é dado por:

$$x_a = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)^T = (\omega, E'_q, E'_d, x_d, x'_d, T'_{do}, x_q, x'_q, T'_{qo})^T \quad (20)$$

Note que não há nenhuma restrição dada pela função álgebrica $g(\cdot) = 0$ neste exemplo. Além disso, acrescentando as funções $r(\cdot)$ em relação aos parâmetros que são considerados como estados constantes (veja equação (9)) para realização do teste de identificabilidade, obtemos:

$$F(\cdot) = \begin{pmatrix} (2H)\dot{x}_1 + \omega_o x_2 u_2 + \omega_o x_3 u_3 + \omega_o (x_5 - x_8) u_2 u_3 + D x_1 - \omega_o u_4 \\ x_6 \dot{x}_2 + x_2 - (x_4 - x_5) u_3 - u_1 \\ x_9 \dot{x}_3 + x_3 + (x_7 - x_8) u_2 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{pmatrix} \quad h(\cdot) = (x_1) \quad (21)$$

Tabela 1: Comparação dos valores obtidos dos ranks do sistema (21).

Índices ($k = j$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$rank(J)$	20	30	40	50	60	70	80	89	91
$n + rank(J_{red})$	27	36	45	54	63	72	81	90	91
Conclusão	Modelo não é identificável								

Ao determinar $F(\cdot)$ e $h(\cdot)$ da equação (21), pode-se determinar as matrizes G e H da equação (7) para os índices k e j respectivamente. Com essa matrizes determinadas obtem-se a matriz Jacobiana e testa-se as condições (A1) e (A2) das equações (8)-(9). A condição (A2) não será verificada porque supõe-se que o sistema parte de uma condição inicial consistente. A Tabela 1 mostra os resultados dos cálculos do rank da Jacobiana J e J_{red} do sistema (21). Os valores dos ranks foram obtidos pelas equações (6) e (8). Os cálculos realizados foram obtidos através de cálculos computacionais com variáveis simbólicas no software Matlab. Nota-se na Tabela 1 que a medida que os índices aumentam os valores dos ranks se aproximam. No entanto, quando o índice é igual a 8 os valores de rank não são iguais (como destacado na Tabela 1), que era o resultado esperado de acordo com a condição (A1), portanto conclui-se que o modelo não é identificável.

Em [1] foi mostrado também por análise numérica que mantendo o parâmetro x'_d fixo o modelo (21) torna-se identificável. Portanto, vamos repetir a análise de identificabilidade anterior do modelo (21) fixando-se o parâmetro x'_d . Desta forma, o vetor de estados aumentado (mantendo x'_d fixo) é dado por:

$$x_a = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)^T = (\omega, E'_q, E'_d, x_d, T'_{do}, x_q, x'_q, T'_{qo})^T \quad (22)$$

Novamente, as funções $F(\cdot)$ e $h(\cdot)$ para o teste de identificabilidade (fixando-se x'_d) são dadas por:

$$F(\cdot) = \begin{pmatrix} (2H)\dot{x}_1 + \omega_o x_2 u_2 + \omega_o x_3 u_3 + \omega_o(x'_d - x_7)u_2 u_3 + Dx_1 - \omega_o u_4 \\ x_5 \dot{x}_2 + x_2 - (x_4 - x'_d)u_3 - u_1 \\ x_8 \dot{x}_3 + x_3 + (x_6 - x_7)u_2 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{pmatrix} \quad h(\cdot) = (x_1) \quad (23)$$

A Tabela 2 mostra os valores comparativos dos ranks para o novo sistema (23). Similarmente ao caso anterior, observa-se que os valores dos ranks se aproximam a medida que os índices aumentam. No entanto, ao contrário do caso anterior os valores de rank são iguais para o índice igual a 7 (como destacado na Tabela 1), conforme esperado da condição (A1). Portanto o modelo do sistema (23) é identificável para o conjunto de medidas e parâmetros.

Tabela 2: Comparação dos valores obtidos dos ranks do sistema (23).

Índices ($k = j$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$rank(J)$	18	27	36	45	54	63	72	80	81
$n + rank(J_{red})$	24	32	40	48	56	64	72	80	81
Conclusão	Modelo é identificável								

5 Conclusões

Neste trabalho é proposto a aplicação de um teste de identificabilidade antes da aplicação de estimação de parâmetros de geradores síncronos. A abordagem de identificabilidade é baseada em observabilidade de sistemas não lineares.

O teste de identificabilidade verifica se para um conjunto de entradas e saídas os parâmetros desconhecidos do modelo podem ou não serem estimados (identificáveis). O teste confirmou a não identificabilidade de um conjunto de parâmetros de entradas e saídas escolhidas do modelo transitório do gerador síncrono. Verificou-se também a identificabilidade dos parâmetros do mesmo modelo quando o vetor de parâmetros foi reduzido conforme apontava o método de estimação.

Como trabalhos futuros será estudado o teste de observabilidade para quando o gerador síncrono for representado por EADs.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] E. P. T. Cari, “Estimação dos parâmetros da máquina síncrona e seu sistema de excitação,” Ph.D. dissertation, Universidade de São Paulo, 2005.
- [2] C. Cobelli and J. J. Distefano 3rd, “Parameter and structural identifiability concepts and ambiguities: a critical review and analysis,” *American Journal of Physiology-Regulatory, Integrative and Comparative Physiology*, vol. 239, no. 1, pp. R7–R24, 1980.
- [3] E. Walter and L. Pronzato, *Identification of parametric models from experimental data*. Springer Verlag, 1997.
- [4] A. F. Villaverde, N. D. Evans, M. J. Chappell, and J. R. Banga, “Input-dependent structural identifiability of nonlinear systems,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 3, no. 2, pp. 272–277, 2018.
- [5] A. F. Villaverde, A. Barreiro, and A. Papachristodoulou, “Structural identifiability analysis via extended observability and decomposition,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 26, pp. 171–177, 2016.
- [6] J. R. Banga and E. Balsa-Canto, “Parameter estimation and optimal experimental design,” *Essays in biochemistry*, vol. 45, pp. 195–210, 2008.
- [7] R. Hermann and A. Krener, “Nonlinear controllability and observability,” *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 22, no. 5, pp. 728–740, 1977.
- [8] W. J. Terrell, “Observability of nonlinear differential algebraic systems,” *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 16, no. 2, pp. 271–285, 1997.
- [9] M. Gerdin, “Local identifiability and observability of nonlinear differential-algebraic equations,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, no. 1, pp. 802–807, 2006.